Problemi sulle circonferenze

In generale l'equazione delle circonferenze è $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Casi particolari

1) Se $a=0$ il centro è sull'asse y

2) Se $b=0$ il centro è sull'asse x

3) Se $a=b=0$ il centro è nell'origine degli assi

4) Se $c=0$ la circonferenze passa per l'origine

Esempio

$$x^2+y^2+(1-2k)x-2ky+5k+3=0$$

a) passa per l'origine se $c=0$, cioè se $5k+3=0$, $k=-\frac{3}{5}$

Se $c=0$ è sicuramente una circonferenza.

b) il centro è sull'asse x se $b=0$, cioè se $-2k=0$, $k=0$, ma per $k=0$ si ha:

$$x_c^2 + y_c^2 - c = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c =$$

$$= \frac{1}{4} + 0 - 3 < 0$$ quindi non si ha una circonferenza.

c) il centro è sull'asse y se $a = 0$, cioè se $1 - 2k = 0$, $k = \frac{1}{2}$, ma per $k = \frac{1}{2}$ si ha:

$$x_c^2 + y_c^2 - c = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c =$$

$$= \frac{1}{4} - \left(\frac{5}{2} + 3\right) = \frac{1}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{17}{4} < 0$$

quindi non si tratta di una circonferenza

Non ci sono dunque circonferenze del tipo indicato con il centro sugli assi cartesiani.

Esercizi

1) $C(2,0)$, passa per $P(0,2)$

$a = -2x_c = -4$, $b = -2y_c = 0$

$x^2 + y^2 - 4x + c = 0$, sostituendo le coordinate di P si ottiene c:

$4 + c = 0$, $c = -4$, l'equazione della circonferenza è quindi: $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$

2) Gli estremi del diametro sono: $A(-2,4)$, $B(0,2)$

Il centro è il punto medio:

$C(-1,3)$ e il raggio è

$$r = \overline{BC} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

da cui: $a = -2x_c = 2$, $b = -2y_c = -6$

$$c = x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 1 + 9 - 2 = 8$$

La circonferenza ha equazione

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$$

3) $A(0,0)$, $B(3,1)$, $C(3,3)$

I 3 punti appartengono alla circonferenza: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array} \begin{cases} c=0 \\ 9+1+3a+b=0 \\ 9+9+3a+3b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=0 \\ 10+3a+b=0 \\ 18+3a+3b=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=0 \\ 2b=-8 \\ 10+3a+b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=0 \\ b=-4 \\ 3a=-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=0 \\ b=-4 \\ a=-2 \end{cases}$$

$$x^2+y^2-2x-4y=0$$

4) Centro sull'asse y e passante per $A(1,5)$, $B(-3,1)$

$C(0, y_c) \Rightarrow \quad x_c = 0, \quad a = -2x_c = 0$

$$\begin{cases} a = 0 \\ 1+25+a+5b+c=0 \\ 9+1-3a+b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ 26+5b+c=0 \\ 10+b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ 16+4b=0 \\ 10+b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=-4 \\ c=-10-b=-6 \end{cases}$$

$$x^2+y^2-4y-6=0$$

5) Passa per $A(3,2)$, $B(0,-1)$ e ha raggio 3

$$r^2 = \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c \qquad \begin{cases} a^2+b^2-4c=4r^2=36 \\ 9+4+3a+2b+c=0 \\ 1-b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2-4c=36 \\ 13+3a+2b+c=0 \\ 1-b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+b^2-4(b-1)=36 \\ 13+3a+2b+b-1=0 \\ c=b-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2-4b+4=36 \\ 12+3a+3b=0 \\ c=b-1 \end{cases} \quad \begin{cases} (-b-4)^2+b^2-4b=32 \\ a=-b-4 \\ c=b-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2+16+8b+b^2-4b=32 \\ a=-b-4 \\ c=b-1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2b^2+4b=16 \\ a=-b-4 \\ c=b-1 \end{cases}$$

5

$$\begin{cases} b^2+2b-8=0 \\ a=-b-4 \\ c=b-1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-1\pm\sqrt{1+8} \\ a=-b-4 \\ c=b-1 \end{cases}$$

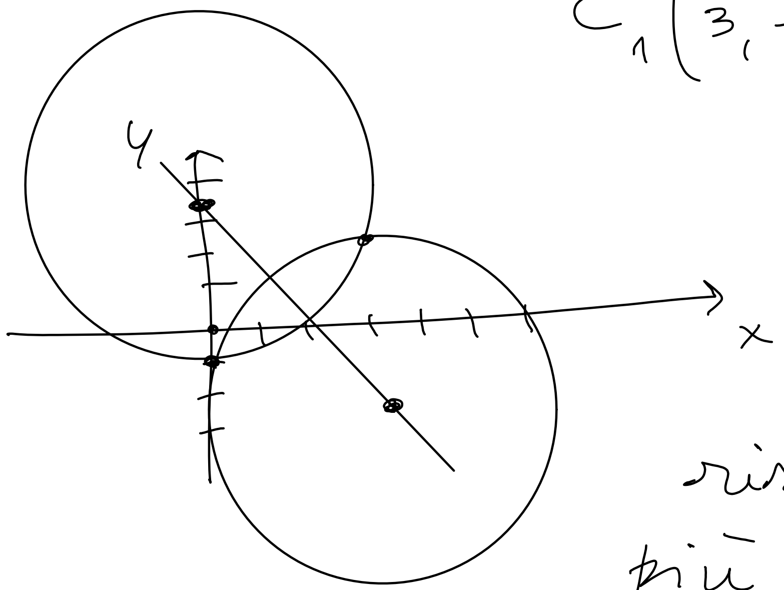
$$\begin{cases} b_1=2 \\ a_1=-6 \\ c_1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_2=-4 \\ a_2=0 \\ c_2=-5 \end{cases}$$

2 circonf.

1) $x^2+y^2-6x+2y+c=0$

2) $x^2+y^2-4y-5=0$

$C_1(3,-1)$, $C_2(0,2)$



Si possono verificare i risultati con più precisione usando Geogebra.